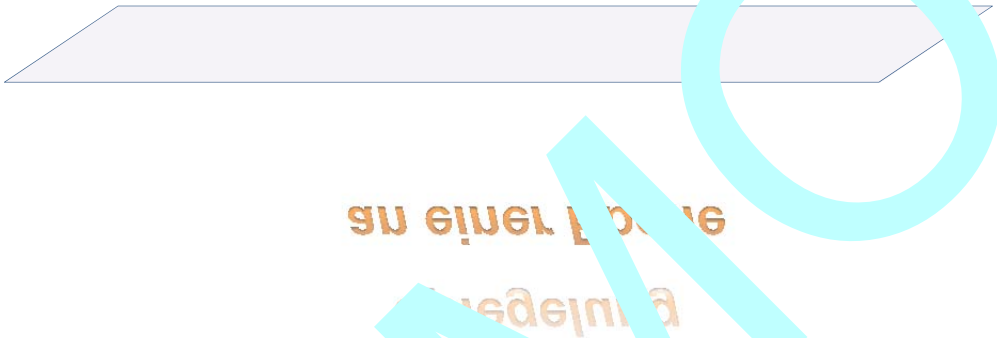
Matrizenrechnung
Anwendungen

Spiegelung an einer Ebene



tei Nr. 62065

Stand 27. 7. 2021

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

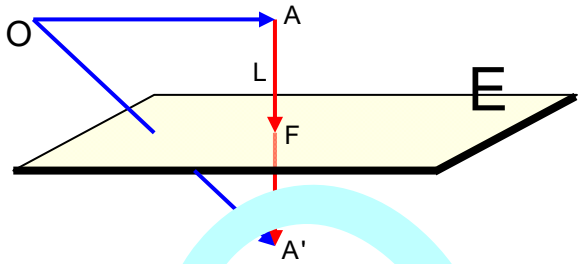
Berechnet man Spiegelungen vektoriell, dann bestimmt man Bildpunkte mit Lotvektoren.
Dies wird im Text 63235 ausführlich besprochen.

In vorliegendem Text wird daraus eine Abbildungsmatrix erzeugt, und zwar an Beispielen und ganz allgemein, was zu einer „schlimmen“ aber nützlichen Formel führt.

Inhalt

1 Methoden aus der Vektorrechnung

Bei der Spiegelung eines Punktes an einer Ebene fällt man das Lot vom Punkt A auf die Ebene. Für diese Lotgerade verwendet man einen Normalenvektor der Ebene. Diese Lotgerade schneidet E im sogenannten Lotfußpunkt F. Das Spiegelbild A' von A liegt auf dieser Lotgeraden, so dass F der Mittelpunkt von AA' ist.



Verwendet man Ortsvektoren, dann kann man eine der folgenden Methoden anwenden:

(Zuerst muss F berechnet sein).

1. Methode: **Vektorenvergleich**

$\overrightarrow{FA'} = \overrightarrow{AF}$ d. h. $\vec{a}' - \vec{f} = \vec{f} - \vec{a}$

Daraus folgt: $\boxed{\vec{a}' = 2 \cdot \vec{f} - \vec{a}}$ (*)

2. Methode: **Vektoraddition:**

$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AF}$ d. h. $\vec{a}' = \vec{a} + 2 \cdot (\vec{f} - \vec{a})$

Daraus folgt: $\boxed{\vec{a}' = 2 \cdot \vec{f} - \vec{a}}$ (*)

Zahlenbeispiel: Der Punkt $A(2|-1|1)$ soll an E: $2x + y - 3z = 10$ gespiegelt werden.

Lotgerade L: Der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ von E wird als Richtungsvektor von L verwendet: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt mit E: L koordinatenweise in E einsetzen:

$$2 \cdot \boxed{2r} + \boxed{-1+r} - 3 \cdot \boxed{1-3r} = 10 \quad \Rightarrow \quad 14r = 14 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r = 1}$$

Lotfußpunkt: $\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \boxed{1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F(2|0|-2)}$

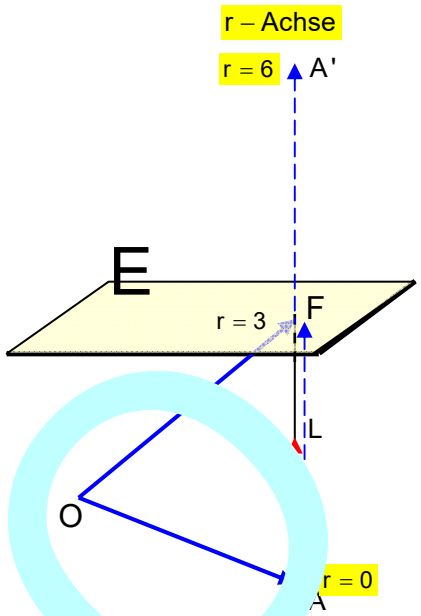
Jetzt die in die Spiegelungsgleichung (*) einsetzen: $\vec{a}' = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Es folgt: $\vec{a}' = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A'(4|1|-5)}$

Auf der nächsten Seite zeige ich eine Tricklösung.

Hinweis: Liegt die Ebenengleichung als Parametergleichung vor, muss zuerst ein Normalenvektor berechnet werden.

Tricklösung für eine Ebenenspiegelung



1. Schritt: Aufstellen der Gleichung der Lotgeraden:

Für die Gleichung einer Lotgeraden verwendet man als Aufpunkt den Punkt A, den man spiegeln soll.
Als Richtungsvektor verwendet man den der Ebenengleichung entnommenen Normalenvektor $\vec{n}$.
Dann lautet die Lotgerade: $\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{n}$

2. Schritt: Berechnung des Lotfußpunktes F

Dazu setzt man den allgemeinen Punkt der Lotgeraden koordinatenweise in die Ebenengleichung ein.
Im Beispiel der Zeichnung erhält man das Ergebnis r = 3.

Der Lotfußpunkt wird also dann durch $\vec{x} = \vec{a} + \boxed{3} \cdot \vec{n}$ berechnet.
Man benötigt ihn aber bei dieser Lösungsmethode gar nicht! – Er kann weglassen!

3. Schritt: Berechnung des Bildpunktes

Jetzt kommt der Trick: *Weil zum Bildpunkt der Parameterwert* $\boxed{r = 0}$ *gehört, und zum Lotfußpunkt (in diesem Beispiel)* $\boxed{r = 3}$ *gehört, gehört zum gesuchten Bildpunkt A' der* ***doppelte Parameterwert*** $\boxed{r = 6}$.

Der Bildpunkt folgt also aus $\vec{x} = \vec{a} + \boxed{6} \cdot \vec{n}$

Zum Zahlenbeispiel von Seite 7:

Der Punkt $A(0\,|\,-1\,|\,1)$ soll an E: $2x + y - 3z = 10$ gespiegelt werden.

Lotgerade: Der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ von E wird als Richtungsvektor von L verwendet: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt mit E: L koordinatenweise in E einsetzen:

$$2 \cdot \boxed{2r} + \boxed{-1 + r} - 3 \cdot \boxed{1 - 3r} = 10 \quad \Rightarrow \quad 14r = 14 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r = 1}$$

Spiegelbild $\vec{a}' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \boxed{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{F(4\,|\,1\,|\,-5)}$

Die Spiegelungsgleichung wird bei dieser Idee also gar nicht gebraucht!

2 Verwendung von Matrizen

2.1 Beispiel 1

Der Punkt $A(x_1 \mid y_1 \mid z_1)$ soll an E: $x+y+z=0$ gespiegelt werden.

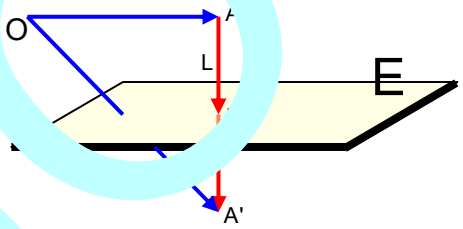
Lotgerade L: Der Normalenvektor $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ von E wird als Richtungsvektor

von L verwendet: $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

Schnittpunkt mit E: L koordinatenweise in E einsetzen:

$x_1+r+y_1+r+z_1+r=0 \quad\Rightarrow\quad 3r=-x_1-y_1-z_1$

$r=\dfrac{-x_1-y_1-z_1}{3}$



Lotfußpunkt: $\vec{f}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}+\dfrac{-x_1-y_1-z_1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

Spiegelbild: $\vec{x}'=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}+\dfrac{-x_1-y_1-z_1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}x_1-\frac{2}{3}x_1-\frac{2}{3}y_1-\frac{2}{3}z_1\\y_1-\frac{2}{3}x_1-\frac{2}{3}y_1-\frac{2}{3}z_1\\z_1-\frac{2}{3}x_1-\frac{2}{3}y_1-\frac{2}{3}z_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}x_1-\frac{2}{3}y_1-\frac{2}{3}z_1\\-\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}y_1-\frac{2}{3}z_1\\-\frac{2}{3}x_1-\frac{2}{3}y_1+\frac{1}{3}z_1\end{pmatrix}$$

In Matrixschreibweise $\vec{x}'=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$ oder $\vec{x}'=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\-2&-2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$

Ergebnis: Die Matrix zur Spiegelung an E lautet $S=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

Beispiel: Spieglung von $(3\mid 6\mid -3)$ an dieser Ebene.

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\6\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-4+2\\-2+2+2\\-2-2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-7\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad A'(-1\mid 2\mid -7)$$

Es gibt Kontrollmöglichkeiten für diese Ergebnisse:

(1): $\overrightarrow{AA'}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\6\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-4\\-4\end{pmatrix}$ Dieser Vektor ist kollinear zum Normalenvektor $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ von E.

Also wurde (tatsächlich) senkrecht an E gespiegelt.

(2) $P(1\mid 2\mid -3)$ ist ein Punkt von E. Er muss also Fixpunkt bei dieser Spiegelung sein:

$$\vec{x}'=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\-2&-2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1-4+6\\-2+2+6\\-2-4-3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\6\\-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad P'=P$$

2.2 Beispiel 2

Der Punkt $A(x_1 \mid y_1 \mid z_1)$ soll an E: $2x + y - 3z = 0$ gespiegelt werden.

Lotgerade L: Der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ von E wird als Richtungsvektor

von L verwendet: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt mit E: L koordinatenweise in E einsetzen:

$$2 \cdot \boxed{x_1 + 2r} + \boxed{y_1 + r} - 3 \cdot \boxed{z_1 - 3r} = 0$$

$$2x_1 + 4r + y_1 + r - 3z_1 + 9r = 0$$

$$14r = -2x_1 - y_1 + 3z_1$$

$$r = \frac{-2x_1 - y_1 + 3z_1}{14}$$

Lotfußpunkt: $\vec{f} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \boxed{\frac{-2x_1 - y_1 + 3z}{14}} \cdot \begin{pmatrix} & \\ & \\ & -3 \end{pmatrix}$

Siegelbild: $\vec{a}' = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \boxed{\frac{2x_1 - y_1 + 3z_1}{14}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ y \\ z_1 \end{pmatrix} \boxed{\frac{-2x_1 - y_1 + 3z_1}{7}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

d. h. $\begin{pmatrix} & \\ y_1' \\ z_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - \frac{4}{7}x_1 & y_1 + \frac{6}{7}z_1 \\ y_1 - \frac{2}{7}x_1 - & \frac{3}{7}z_1 \\ z & \frac{6}{7}x_1 + \frac{3}{7}y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & -\frac{2}{7}y_1 + \frac{6}{7}z_1 \\ -\frac{2}{7}x_1 + \frac{6}{7}y_1 + \frac{3}{7}z_1 \\ \frac{6}{7}x_1 + \frac{3}{7}y_1 - \frac{2}{7}z_1 \end{pmatrix}$

Abbildungsgleichung: $\vec{a}' = \begin{pmatrix} & -2 & 6 \\ -2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \\ z \end{pmatrix}$

Punktspiel: $A(3 \mid -1 \mid \ldots) \rightarrow \vec{a}' = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} & -2 & 6 \\ -2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 9+2 \\ -6-6 \\ 18-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{7} \\ -\frac{12}{7} \\ \frac{15}{7} \end{pmatrix} \Rightarrow A'\left(\frac{11}{7} \mid -\frac{12}{7} \mid \frac{15}{7}\right)$

Kontrolle der Spiegelungsrichtung: $\overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix} \frac{11}{7} \\ -\frac{12}{7} \\ \frac{15}{7} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{10}{7} \\ -\frac{5}{7} \\ \frac{15}{7} \end{pmatrix} = \boxed{-\frac{5}{7}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = -\frac{5}{7} \cdot \vec{n}_E$

Also wurde senkrecht zur Ebene gespiegelt.

Kontrolle eines Fixpunktes auf E: Wähle x = 1 und z = 1, dann folgt aus der Ebenengleichung:

$2x + y - 3z = 0 \Rightarrow y = -2x + 3z = -2 + 3 = 1$. Fixpunkt sollte sein: $B(1 \mid 1 \mid 1)$.

Bildpunkt: $\vec{b}' = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 3-2+6 \\ -2+6+3 \\ 6+3-2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{b}$

Ergebnis: B ist Fixpunkt.

2.3 Beispiel 3

Im Beispiel 1 wurde an einer Ebene gespiegelt, die durch den Ursprung geht.
Jetzt verschiebe ich die Ebene E aus Beispiel 1, so dass der Ursprung nicht mehr auf ihr liegt:

Der Punkt $A(x_1 \mid y_1 \mid z_1)$ soll an E: $x + y + z = \boxed{1}$ gespiegelt werden.

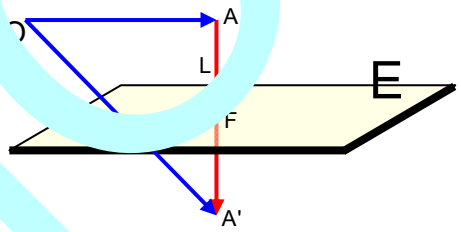
Lotgerade L: Der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ von E wird als Richtungsvektor

von L verwendet: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt mit E: L koordinatenweise in E einsetzen:

$x_1 + r + y_1 + r + z_1 + r = 1 \quad \Rightarrow \quad 3r = 1 - x_1 - y_1 - z_1$

$r = \dfrac{1 - x_1 - y_1 - z_1}{3}$



Lotfußpunkt: $\vec{f} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \dfrac{1 - x_1 - y_1 - z_1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Spiegelbild: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \dfrac{1 - x_1 - y_1 - z_1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} x_1 + \boxed{\tfrac{2}{3}} - \tfrac{2}{3}x_1 - \tfrac{2}{3}y_1 - \tfrac{2}{3}z_1 \\ y_1 + \boxed{\tfrac{2}{3}} - \tfrac{2}{3}x_1 - \tfrac{2}{3}y_1 - \tfrac{2}{3}z_1 \\ z_1 + \boxed{\tfrac{2}{3}} - \tfrac{2}{3}x_1 - \tfrac{2}{3}y_1 - \tfrac{2}{3}z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\tfrac{2}{3}} + \tfrac{1}{3}x_1 - \tfrac{2}{3}y_1 - \tfrac{2}{3}z_1 \\ \boxed{\tfrac{2}{3}} - \tfrac{2}{3}x_1 + \tfrac{1}{3}y_1 - \tfrac{2}{3}z_1 \\ \boxed{\tfrac{2}{3}} - \tfrac{2}{3}x_1 - \tfrac{2}{3}y_1 + \tfrac{1}{3}z_1 \end{pmatrix}$$

In Matrixform: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} \tfrac{2}{3} \\ \tfrac{2}{3} \\ \tfrac{2}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tfrac{1}{3} & -\tfrac{2}{3} & -\tfrac{2}{3} \\ -\tfrac{2}{3} & \tfrac{1}{3} & -\tfrac{2}{3} \\ -\tfrac{2}{3} & -\tfrac{2}{3} & \tfrac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ oder $\vec{x}' = \begin{pmatrix} \tfrac{2}{3} \\ \tfrac{2}{3} \\ \tfrac{2}{3} \end{pmatrix} + \tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$

Ergebnis: Die Matrix für die Spiegelung an E lautet $S = \begin{pmatrix} \tfrac{1}{3} & -\tfrac{2}{3} & -\tfrac{2}{3} \\ -\tfrac{2}{3} & \tfrac{1}{3} & -\tfrac{2}{3} \\ -\tfrac{2}{3} & -\tfrac{2}{3} & \tfrac{1}{3} \end{pmatrix}$

Die Abbildungsgleichung enthält jedoch einen additiven Verschiebungsvektor: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} \tfrac{2}{3} \\ \tfrac{2}{3} \\ \tfrac{2}{3} \end{pmatrix} + S \cdot \vec{x}$.

Den Grund erkennt man aus der obigen Rechnung: Weil die Ebene nicht durch den Ursprung geht, enthält r den Summanden $\tfrac{1}{3}$, woraus sich dann dieser Verschiebungsvektor ergibt.

Er hat also etwas mit dem Abstand des Ursprungs von der Spiegelungsebene E zu tun.

Rechnet man von O bis zum Lotfußpunkt, dann liest man oben ab: $\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \dfrac{1 - 0 - 0 - 0}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dass in der Abbildungsgleichung dann das Doppelte steht, liegt an der Verdoppelung des Vektors bis zum Spiegelbild.

2.4 Beispiel 4

Im Beispiel 1 wurde an einer Ebene gespiegelt, die durch den Ursprung geht.
Jetzt verschiebe ich die Ebene E aus Beispiel 1, so dass der Ursprung nicht mehr auf ihr liegt:

Der Punkt $A(x_1 \mid y_1 \mid z_1)$ soll an E: $2x + y - 3z = \mathbf{14}$ gespiegelt werden.

Lotgerade L: Der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ von E wird als Richtungsvektor

von L verwendet: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt mit E: L koordinatenweise in E einsetzen:

$$2 \cdot \boxed{x_1 + 2r} + \boxed{y_1 + r} - 3 \cdot \boxed{z_1 - 3r} = \mathbf{14}$$

$$2x_1 + 4r + y_1 + r - 3z_1 + 9r = \mathbf{14}$$

$$14r = \mathbf{14} - 2x_1 - y_1 + 3z_1$$

$$r = \mathbf{1} - \frac{-2x_1 - y_1 + 3z_1}{14}$$

Lotfußpunkt: $\vec{f} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \boxed{\mathbf{1} + \frac{-2x_1 - y_1 + 3z_1}{14}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Siegelbild: $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \boxed{\mathbf{1} + \frac{-2x_1 - y_1 + 3z_1}{14}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \boxed{\mathbf{2} + \frac{-2x_1 - y_1 + 3z_1}{7}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

d. h. $\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \\ z_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \mathbf{4} - \frac{4}{7}x_1 - \frac{2}{7}y_1 + \frac{6}{7}z_1 \\ y_1 + \mathbf{2} - \frac{2}{7}x_1 - \frac{1}{7}y_1 + \frac{3}{7}z_1 \\ z_1 - \mathbf{6} + \frac{6}{7}x_1 + \frac{3}{7}y_1 - \frac{9}{7}z_1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{-3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{7}x_1 - \frac{2}{7}y_1 + \frac{6}{7}z_1 \\ -\frac{2}{7}x_1 + \frac{6}{7}y_1 + \frac{3}{7}z_1 \\ +\frac{6}{7}x_1 + \frac{3}{7}y_1 - \frac{2}{7}z_1 \end{pmatrix}$

Abbildungsgleichung: $\vec{x}' = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 2 & 3 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{-6} \end{pmatrix}$

Hier beobachtet man dasselbe wie in Beispiel 3: Weil die Ebene nicht durch den Ursprung geht, enthält die Abbildungsgleichung einen Verschiebungsvektor, der ein Vielfaches des Normalenvektors der Spiegelungsebene ist.
Fällt man nämlich das Lot vom einem Punkt P_1,auf E, dann liefert die oben gezeigte Berechnung den

Lotfußpunkt: $\vec{f} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \boxed{\mathbf{1} + \frac{-2x_1 - y_1 + 3z_1}{14}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Ist P_1 jedoch der Ursprung, folgt: $\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \boxed{\mathbf{1} + \frac{-2 \cdot 0 - 0 + 3 \cdot 0}{14}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

In der Abbildungsgleichung steht das Doppelte davon.

2.5 Herleitung der Spiegelungsmatrix an einer beliebigen Ursprungsebene

Gegeben sei eine Ebene E durch den Ursprung: $ax + by + cz = 0$.

Ger Punkt $P(x_1 \mid y_1 \mid z_1)$ soll an E gespiegelt werden.

Lotgerade L von $P_1(x_1 \mid y_1 \mid z_1)$ auf E:

Der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ von E wird als Richtungsvektor von L verwendet:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt mit E: L koordinatenweise in E einsetzen:

$$a \cdot \boxed{x_1 + ra} + b \cdot \boxed{y_1 + rb} + c \cdot \boxed{z_1 + rc}$$

$$ax_1 + a^2 r + by_1 + b^2 r + cz_1 + c^2 r = 0$$

$$r \cdot \left(a^2 + b^2 + c^2\right) = -ax_1 -$$

$$r = -\frac{ax_1 + by_1 + cz_1}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Lotfußpunkt: $\vec{f} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \boxed{-\frac{ax_1 + \quad + cz_1}{a^2 + b^2 \quad}} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Siegelbild: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \boxed{-\frac{ax_1 + by_1 + cz_1}{a^2 + b^2 + c^2}} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Als Abkürzung verwe ich t $a^2 + b^2 + c^2$ n^2

d. $\vec{x}' = \begin{pmatrix} x_1 - 2\frac{a^2}{n^2} \quad 2\frac{ab}{n^2} y_1 - 2 \quad \\ 2\frac{ab}{n^2} x_1 - \quad \frac{bc}{n^2} z_1 \\ z_1 - \quad x_1 - 2\frac{bc}{n^2} \quad - 2\frac{c^2}{n^2} z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(1 - 2\frac{a^2}{n^2}\right) x_1 - 2\frac{ab}{n^2} y_1 - 2\frac{ac}{n^2} z_1 \\ -2\frac{ab}{n^2} x_1 + \left(1 - 2\frac{b^2}{n^2}\right) y_1 - 2\frac{bc}{n^2} z_1 \\ -2\frac{ac}{n^2} x_1 - 2\frac{bc}{n^2} y_1 + \left(1 - 2\frac{c^2}{n^2}\right) z_1 \end{pmatrix}$

In ixschreibweise:

$$= \begin{pmatrix} 1 - & -2\frac{ab}{n^2} & -2\frac{ac}{n^2} \\ -2\frac{ab}{n^2} & 1 - 2\frac{b^2}{n^2} & -2\frac{bc}{n^2} \\ -2\frac{ac}{n^2} & -2\frac{bc}{n^2} & 1 - 2\frac{c_2}{n^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

Nebenrechnung für die Hauptdiagonale:

$s_{11} = 1 - 2\frac{a^2}{n^2} = \frac{n^2}{n^2} - 2\frac{a^2}{n^2} = \frac{a^2+b^2+c^2-2a^2}{n^2} = \frac{-a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}$, analog: $s_{22} = \frac{a^2-b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}$ und $s_{33} = \frac{a^2+b^2-c^2}{a^2+b^2+c^2}$.

Jetzt wird $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2}$ ausgeklammert, und das Urbild schreibe ich ohne den Index 1:

$$\vec{x}' = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} -a^2 + b^2 + c^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & a^2 - b^2 + c^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & a^2 + b^2 - c^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

2.6 Herleitung der Spiegelungsgleichung an einer beliebigen Ebene

Gegeben sei eine Ebene E durch den Ursprung: $ax + by + cz = \boxed{d}$.

Ger Punkt $P(x_1 \mid y_1 \mid z_1)$ soll an E gespiegelt werden.

Lotgerade L von $P_1(x_1 \mid y_1 \mid z_1)$ auf E:

Der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ von E wird als Richtungsvektor von L verwendet:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt mit E: L koordinatenweise in E einsetzen:

$$a \cdot \boxed{x_1 + ra} + b \cdot \boxed{y_1 + rb} + c \cdot \boxed{z_1 + rc}$$

$$ax_1 + a^2 r + by_1 + b^2 r + cz_1 + c^2 r = d$$

$$r \cdot \left(a^2 + b^2 + c^2\right) = d - ax_1 - by_1 - cz_1$$

$$r = \frac{d}{a^2 + b^2 + c^2} - \frac{ax_1 + by_1 + cz_1}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Lotfußpunkt: $\vec{f} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \boxed{\frac{d}{a^2 + b^2 + c^2} - \frac{ax_1 + by_1 + cz_1}{a^2 + b^2 + c^2}} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Siegelbild: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \boxed{\frac{d}{a^2 + b^2 + c^2} - \frac{ax_1 + by_1 + cz_1}{a^2 + b^2 + c^2}} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Nun trenne ich den konstanten Summanden ab:

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \boxed{-\frac{ax_1 + by_1 + cz_1}{a^2 + b^2 + c^2}} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \boxed{\frac{2d}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}$$

Daraus wird völlig analog zu Seite 9

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} -2\frac{a^2}{n^2} & -2\frac{ab}{n^2} & -2\frac{ac}{n^2} \\ -2\frac{ab}{n^2} & 1-2\frac{b^2}{n^2} & -2\frac{bc}{n^2} \\ -2\frac{ac}{n^2} & -2\frac{bc}{n^2} & 1-2\frac{c_2}{n^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \frac{2d}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Oder ausführlich:

$$\vec{x}' = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} -a^2 + b^2 + c^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & a^2 - b^2 + c^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & a^2 + b^2 - c^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{2d}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Es folgen einige Beispiele dazu.